La K-théorie de Milnor des anneaux p-adiques, d'après Lüders-Morrow

Exposé au Sém. Pragmatic
21/04/2022

— Définitions

- (K-groupes) R anneau (commutatif pour simplicité)

  $K_0(R) = \{ \cancel{\text{fin. proj}}\ R\text{-mod. finis. proj} \} / \cong \text{iso}$ — Grothendieck

  $K_1(R) = GL(R) / \text{matrices élémentaires}$ — Bass

  $K_2(R) = \text{Cent}(St(R)) = \ker(St(A) \xrightarrow{\phi} GL(A))$ — Milnor

  $$St(A) = \left\langle e_{ij}(\lambda),\ i,j\in\mathbb{N}^*, i\neq j, \lambda\in A \;\middle|\; \begin{array}{l} e_{ij}(\lambda)\, e_{ij}(\mu) = e_{ij}(\lambda+\mu) \\ {[e_{ij}(\lambda), e_{jk}(\mu)]} = e_{ik}(\lambda\mu) \quad i\neq k \\ {[e_{ij}(\lambda), e_{kl}(\mu)]} = 1 \quad i\neq l, j\neq k \end{array} \right\rangle$$

  prendre les matrices élémentaires de transvection associées.

- $R = F$ corps commutatif

  $K_0(F) \xrightarrow[\sim]{\dim_F} \mathbb{Z}$,

  $K_1(F) \xrightarrow[\sim]{\det} F^\times \xhookrightarrow{\sim} K_1(F)$

  $K_2(F) \cong F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times / \langle a\otimes(1-a) \mid a\neq 0,1\rangle$ (Matsumoto '69)

- Déf (Milnor) R anneau commutatif, le n-ième K-groupe de Milnor

  $$K_n^M(R) := (R^\times)^{\otimes n} \Big/ \text{relations de Steinberg} : a_1\otimes\cdots\otimes a_k\otimes\cdots\otimes(1-a_k)\otimes\cdots\otimes a_n.$$

  Autrement dit $K_*^M(R) = \bigoplus_{n\geq 0} (R^\times)^{\otimes n} \Big/ \langle a\otimes(1-a)\rangle$.

- $K_0^M(R) = \mathbb{Z}$, $K_1^M(R) = R^\times$.
- On a un morphisme naturel : $K_2^M(R) \longrightarrow K_2(R)$

  $$\{a, b\} \longmapsto \left[\widetilde{\begin{pmatrix} a & & \\ & a^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}}, \widetilde{\begin{pmatrix} b & & \\ & 1 & \\ & & b^{-1} \end{pmatrix}} \right]$$

  lift by ϕ to $St(R)$

  qui est un isomorphisme si R est un corps (Matsumoto '69),

  ou si R est un anneau local (Dennis-Stein, van der Kallen, et al.)

  ou si $R = A[\frac{1}{t_1\cdots t_n}]$ où A anneau local régulier, $\#$corps rés. >5

  $t_1,\dots,t_n$ tq. $A/(t_{i_1},\dots,t_{i_k})$ régulier. $\forall$

— Thm (Bloch-Kato-Gabber)

F corps de car $p>0$.

Le morphisme dlog : $K_q^M(F)/p^n \longrightarrow W_n\Omega^q_{F,\log}$ est un iso. $\forall q$, $n\geq 0$

$$\{x_1,\dots,x_n\} \longmapsto \mathrm{dlog}[x_1]\wedge\cdots\wedge\mathrm{dlog}[x_n]$$

Rem. Kato – surjectivité ; Bloch-Kato, Gabber – injectivité.

— Lien avec la cohomologie étale, ~~conjecture~~ conj. de Bloch-Kato (~~Hyodo-Tsuji~~)

• Construction : R anneau commutatif, $m \in R^\times$ un entier.

⇝ suite exacte de Kummer $1 \to \mu_m \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\cdot)^m} \mathbb{G}_m \to 1$ sur $(\operatorname{Spec} R)_{ét}$.

⇝ $R^\times \longrightarrow H^1_{ét}(R, \mu_m)$

$$\begin{tikzcd}
\text{cup-produit} \rightsquigarrow (R^\times)^{\otimes n} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^n_{ét}(R, \mu_m^{\otimes n}) \\
K^M_n(R)/m \arrow[ur, dashed, "h^n_m"'] &
\end{tikzcd}$$

$\{a, 1-a\} \longmapsto 0 \in H^2_{ét}(R, \mu_m^{\otimes 2})$ (Tate)

h^n_m symbole galoisien / symbole cohomologique / morphisme de norme-résidue

• Conj. (Bloch-Kato, Levine, Kahn) $p \in R^\times$ nb. premier

~~Alors~~ $h^n_{p^r} : K^M_n(R)/p^r \longrightarrow H^n_{ét}(R, \mu_{p^r}^{\otimes n})$

• (Bloch-Kato) $h^n_{p^r}$ est un isom. pour $R = F$ ~~est~~ un corps.

• (Levine, Kahn) $h^n_{p^r}$ est un isom pour R anneau semi-local contenant un corps (cas d'égale caractéristique) (contenant un corps) dont les corps résiduels sont assez gros. ~~assez gros~~

• Thm (Voevodsky - Rost) La conj. de Bloch-Kato est vraie.

• Thm (Kerz) La conj. de Bloch-Kato (de Levine et Kahn) est vraie.

— Variante, et les cycles proches (Bloch-Kato-Hyodo ~~de ...~~)

V = anneau à val. discrète complet (de corps des fractions $\operatorname{Frac}(V)$) de caractéristique mixte $(0,p)$.

$$\begin{tikzcd}
X_\eta = U \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\text{lisse}"] & X \arrow[d, "\text{essentiellement plat, de type fini}"] & Y = X_s \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d] \\
\eta \arrow[r] & \operatorname{Spec}(V) & s \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

X régulier ~~régulier~~

Y étale-localement un diviseur à croisements normaux dans X (semistable)

Suite exacte de Kummer ~~Sur~~ $1 \to \mu_{p^r} \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{p^r} \mathbb{G}_m \to 1$ sur $U_{ét}$

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow i^* j_* \cancel{\mathcal{K}^M_q}(\mathbb{G}_m^{\otimes q}) \arrow[r] \arrow[d] & i^* R^q j_* (\mu_{p^r}^{\otimes q}) \\
i^* j_* \mathcal{K}^M_q / p^r \arrow[ur, "h^q_{p^r}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall q, r \geq 0$

• Filtration de Bloch-Kato-Hyodo : soit $\pi \in V$ uniformisante, $e = v_\pi(p)$

sur les symboles / faisceaux de K-groupes de Milnor :

$$i^*j_*K_0^M = \mathcal{U}^0K_0^M \supseteq V^0K_0^M = 0$$

$$i^*j_*K_1^M = \mathcal{U}^0K_1^M \supseteq \underset{\substack{\| \\ i^*(1+\pi\mathcal{O}_X)\cdot\pi^{\mathbb{Z}}}}{V^0K_1^M} \supseteq \underset{\substack{\| \\ i^*(1+\pi\mathcal{O}_X)}}{U^1K_1^M} \supseteq V^1K_1^M = \underset{\substack{\| \\ i^*(1+\pi^2\mathcal{O}_X)}}{\mathcal{U}^2K_1^M} \supseteq V^2K_1^M = \underset{\substack{\| \\ i^*(1+\pi^3\mathcal{O}_X)}}{\mathcal{U}^3K_1^M} \supseteq V^3K_1^M \supseteq \cdots$$

$$i^*j_*K_q^M = \mathcal{U}^0K_q^M \supseteq V^0K_q^M \supseteq \cdots \supseteq \underset{\substack{\| \\ \{\mathcal{U}^mK_1^M,\, i^*j_*K_{q-1}^M\}}}{\mathcal{U}^mK_q^M} \supseteq \underset{\substack{\| \\ \{\mathcal{U}^mK_1^M,\, \pi,\, i^*j_*K_{q-2}^M\} + \mathcal{U}^{m+1}K_q^M}}{V^mK_q^M} \supseteq \mathcal{U}^{m+1}K_q^M \supseteq \cdots \quad (q \geq 2)$$

gr_0^m $\qquad$ gr_1^m

Par l'application de symbole,

on obtient une filtration sur $M_r^q := i^*R^qj_*(\mu_{p^r}^{\otimes q})$ les cycles proches :

$$M_r^q \supseteq \mathcal{U}^0M_r^q \supseteq V^0M_r^q \supseteq \mathcal{U}^1M_r^q \supseteq V^1M_r^q \supseteq \cdots$$

<u>Thm</u> (Bloch-Kato-Hyodo)

<u>r = 1</u> :

1) $\mathcal{U}^0M_1^q = M_1^q$

2) $gr_0^0 \xrightarrow{\sim} \Omega^q_{Y,\log}$

$\{x_1, \dots, x_q\} \longmapsto d\log \bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\log \bar{x}_q$

$gr_1^0 \xrightarrow[\sim]{\partial_\pi} \Omega^{q-1}_{Y,\log}$

$\{x_1, \dots, x_{q-1}, \pi\} \longmapsto d\log \bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\log \bar{x}_{q-1}$

3) $1 \leq m < e' = \frac{ep}{p-1}$.

$gr_0^mM_1^q \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-1}/B_Y^{q-1}$ $\quad (p \nmid m)$

$\{1+\pi^m\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{q-1}\} \longleftarrow x\, d\log y_1 \wedge \cdots \wedge d\log y_{q-1}$

$gr_1^mM_1^q \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-2}/Z_Y^{q-2} \cong B_Y^{q-1}$ $\quad (p \nmid m)$

$\{1+\pi^m\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{q-2}, \pi\} \longleftarrow x\, d\log y_1 \wedge \cdots \wedge d\log y_{q-2}$

$gr_0^mM_1^q \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-1}/Z_Y^{q-1}$ $\quad (p \mid m)$

$gr_1^mM_1^q \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-2}/Z_Y^{q-2}$ $\quad (p \mid m)$

4) $m \geq e'$, $\mathcal{U}^mM_1^q = 0$

$r \geq 1$, M_r^q

1) $\mathcal{U}^0M_r^q = M_r^q$

2) $gr_0^0 \xrightarrow{\sim} W_r\Omega^q_{Y,\log}$

$gr_1^0 \xrightarrow[\sim]{\partial_\pi} W_r\Omega^{q-1}_{Y,\log}$

3) $1 \leq m < e'$, $m = p^s \cdot m_1$.

$gr_0^m \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-1}/B^{q-1}_{s+1,Y}$ $\quad (r > s)$

$gr_1^m \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-2}/Z^{q-2}_{s+1,Y}$ $\quad (r > s)$

$gr_0^m \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-1}/Z^{q-1}_{r,Y}$ $\quad (r \leq s)$

$gr_0^m \xleftarrow{\sim} \Omega_Y^{q-2}/Z^{q-2}_{r,Y}$ $\quad (r \leq s)$

4) $m \geq e'$, aucune connaissance.

<u>Rem</u>. Dans le cas lisse (Bloch-Kato), seulement $\mathcal{U}^m$, pas de V^m.

$r \geq 1$: $gr^0 = gr_0^0 \oplus gr_1^0$, $\quad gr^m = gr_0^m \oplus gr_1^m$ si $r \leq s$.

$r = 1$: de plus, $gr^m \cong \Omega_Y^{q-1}$ si $r > s$. $\longleftarrow$ (Shuji Saito & Kanemoto Sato)

<u>Rem</u>. Généralisation au cas d'une famille quasi-lisse / O_K, a.v.d. hensélien, car mixte, $\zeta_p \in \mathcal{O}_K$

Rem. Tsuji en a donné un analogue pour les filtrations par symboles sur les complexes syntomiques, et les compare avec celles des cycles proches $\Rightarrow (C_{st})$ de Fontaine-Jannsen.

Rem. • les faisceaux des formes diff. B_n^q, Z_n^q. en car $(k) = p > 0$

$$C^{-1} : \Omega^q_{Y/k} \xrightarrow{\sim} Z^q_{Y/k} / B^q_{Y/k}$$

$$x \, d\log y_1 \wedge \dots \wedge d\log y_q \longmapsto x^p \, d\log y_1 \wedge \dots \wedge d\log y_q .$$

$\leadsto$ sous-faisceaux $\Omega^q_{Y/k} \supseteq Z^q \supseteq Z_2^q \supseteq Z_3^q \supseteq \dots \qquad \supseteq B_3^q \supseteq B_2^q \supseteq B_1^q \supseteq 0$

$Z^q = Z_1^q$

tq. $Z_i^q / B_i^q \xrightarrow[\sim]{C^{-1}} Z_{i+1}^q / B_{i+1}^q$

• Faisceaux de de Rham-Witt s'insère dans la suite exacte courte :

$$0 \to \Omega^q_{Y,\log} \to \Omega^q_Y \xrightarrow{1 - C^{-1}} \Omega^q_Y / B^q_Y \to 0 \qquad \text{(topol. étale)}$$

Une autre caractérisation : $\Omega^q_{Y,\log} = \mathrm{Im}\left(d\log : i^* j_* \mathcal{O}_U^\times / \pi^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \Omega^q_Y\right)$

(même au cas semi-stable)

Rem. Pour définir les morphismes $x \, d\log y_1 \wedge \dots \wedge d\log y_q \mapsto \dots$,

on remarque que $\Omega^q_Y = \mathcal{O}_Y \otimes (\mathcal{O}_Y^\times)^{\otimes q} \Big/ \left\langle \begin{array}{l} \cdot \; x \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q \text{ avec } y_i = y_j \text{ certain } i \neq j \\ \cdot \; \sum_i x_i \otimes x_i \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q - \sum_i x_i' \otimes x_i' \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q \quad \text{avec } \sum x_i = \sum x_i' \end{array} \right\rangle$

En particulier dans le cas $X \downarrow V$ lisse + V non ramifié (i.e. $e = 1$) + $r = 1$,

on obtient $0 \to \underbrace{\Omega^{j-1}_Y}_{\text{cohérent}} \longrightarrow i^* R^j j_* \mu_p^{\otimes j} \longrightarrow \Omega^j_{Y,\log} \oplus \Omega^{j-1}_{Y,\log} \to 0$. exacte.

$Y = \mathrm{Spec}(R/p)$

$\leadsto \quad 0 \to \Omega^{j-1}_{R/p} \to H^0_{et}(R/p, i^* R^j j_* \mu_p^{\otimes j}) \to \Omega^j_{R/p,\log} \oplus \Omega^{j-1}_{R/p,\log} \to 0$. exacte.

Complexes de Gersten et généralisation de la conj. de Bloch-Kato et du thm Bloch-Kato-Gabber.

R anneau local noeth. régulier.

$\leadsto$ Gersten ~~complexe~~ ~~$G_n(R)$~~ : $0 \to K_n^M(R) \to \bigoplus_{x \in (\mathrm{Spec} R)^{(0)}} K_n^M(k(x)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in (\mathrm{Spec} R)^{(1)}} K_{n-1}^M(k(x)) \to \dots$

pour la K-théorie de Milnor :

$$\partial : (k(x), v_y) \longmapsto k(y) \quad , \quad \{u_1, \dots, u_{q-1}, \pi_y\} \longmapsto \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{q-1}\}$$

$v_y(-) = 0$ $\quad$ uniformisante

Conj (Gersten) Le complexe de Gersten est (universellement) exacte.

Cas d'égale caractéristique est due à Kerz, avec l'exactitude universelle :

- pour la K-th. de Milnor — si $\# R/m > M_n$
- pour ——— améliorée — aucune contrainte sur $\# R/m$.

Rem. L'exactitude sauf à la place $K_n^M(R)$ avait été dém. par
Elbaz-Vincent, Müller-Stach et aussi Gabber.
Il manquait l'injectivité de Gersten.

Rem. Pour attaquer le cas d'égale caractéristique avec $\#R/m$ fini arbitraire,
on a besoin de transfert / norme pour se ramener au cas $\#R/m$ infini.

Ainsi on a besoin $\hat{K}_j^M(A) \to \hat{K}_j^M(B) \xrightarrow{N_{B/A}} \hat{K}_j^M(A)$ fét $A \to B$

$\times d = \deg(B/A)$.

de la K-th. de Milnor améliorée (Kerz-Gabber)

$$\hat{K}_j^M(R) := \ker\left(K_j^M(R(t)) \xrightarrow{t_{1*}-t_{2*}} K_j^M(R(t_1,t_2)) \right)$$

$R[t]_{mR[t]}$

Prop (Kerz). (R,m) anneau local.

1). $K_n^M(R) \to \hat{K}_n^M(R)$ vérifie certaine propriété universelle parmi ceux avec transferts

2). c'est un iso si $R = F$ un corps ou $n=1$ ou $\#R/m > M_n$.

3). Le complexe de Gersten pour $\hat{K}_\bullet^M(-)$ est universellement exacte si R régulier contenant un corps.

Rem. D'autres complexes de Gersten : pour ~~(avec R local, ind-lisse~~

- cohomologie étale (cycles proches)

  $\Rightarrow$ Bloch-Ogus-Gabber

  en particulier : l'injectivité de Gabber : R local, ind-lisse$/V$, π-henselien.

  alors $H^n_{ét}(R[\frac{1}{p}], \mu_p^{\otimes n}) \longrightarrow H^n_{ét}(R^h_{\pi R}[\frac{1}{p}], \mu_p^{\otimes n})$

  $\| \qquad\qquad \|$

  $H^n_{ét}(R, Rj_*\mu_p^{\otimes n}) \qquad H^n_{ét}(R^h_{\pi R}, Rj_*\mu_p^{\otimes n})$

  $\|$ ← analogue affine du chgt de base propre. $\qquad \|$

  $H^n_{ét}(R/\pi, i^*Rj_*\mu_p^{\otimes n}) \hookrightarrow H^n_{ét}(\mathrm{Frac}(R/\pi), i^*Rj_*\mu_p^{\otimes n})$

  Bloch-Ogus-Gabber

- cohomologie motivique (Geisser-Levine)
- faisceaux de ~~de Rham-Witt log.~~ Hodge-Witt (Gros-Suwa)

Comparaison entre ces objets

$\Rightarrow$ e.g. ① (Bloch-Kato-Gabber) (A,m) A anneau local régulier $\supseteq \mathbb{F}_q$, $\#A/m$ grand.

$\Rightarrow \hat{K}_q^M(A)/p^n \xrightarrow{d\log[\cdot]} W_n\Omega^q_{A,\log}$

② (Conj. de Bloch-Kato de Levine-Kahn) A local contenant un corps $\Rightarrow$ BK isomorphisme.

Thm A (Lüders–Morrow) V ~~...~~ a.v.d. complet de caractéristique mixte $(0,p)$

R local, ind-lisse$/V$, p-henselien, dont le corps rés. est gros. $j, r \geq 1$.

Alors. (i) (Bloch–Kato) $k^j_{p^r} = K^M_j(R[\frac{1}{p}])/p^r \xrightarrow{\sim} H^j_{et}(R[\frac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j})$

(ii) (Injectivité de Gersten mod p^r) : $K^M_j(R)/p^r \hookrightarrow K^M_j(R[\frac{1}{p}])/p^r$.

Thm B (L.-M.) ~~Enlevant la condition sur~~ V a.v.d complet, car $= (0,p)$

R local$/V$ régulier, noeth. tq. R/m_R ind-lisse $/_{V/m}$.

Alors. le complexe de Gersten pour $\hat{K}^M_j(R)/p^r$ est exacte.

(**Also** Nesterenko–Suslin type thm : $\hat{K}^M_j(A)/p^r \simeq H^j(\mathbb{Z}_p(j)(A)/p^r)$ $\forall A$ local. complete)

Preuve :

Thm A' (L.-M.) V a.v.d complet, cara mixte $(0,p)$

R local, ind-lisse$/V$, p-henselien. $j, r \geq 1$

l'appli de résidu de Kato.

Alors la suite (en fait complexe) $0 \to \hat{K}^M_j(R)/p^r \to H^j_{et}(R[\frac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial} W_r\Omega^{j-1}_{R/m_R, \log} \to 0$

Pour expliquer ∂ :

$$\begin{tikzcd}
H^j_{et}(R[\frac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[r, "{cd_p(\text{char } p,\ \text{affine}) \leq 1}"] \arrow[dd] & H^0_{et}(R/\pi, i^*R^j j_* \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[r, "\partial"] & H^0_{et}(R/\pi, W_r\Omega^{j-1}_{\log}) \arrow[d, equal] \\
& & W_r\Omega^{j-1}_{R/\pi, \log} \arrow[d] \\
H^j_{et}(F, \mu_{p^r}^{\otimes j}) & K^M_j(F)/p^r \arrow[l, "\sim"', "\text{BK conj.}"] \arrow[r, "\partial", "\text{symbole modéré } (= \text{résidue})"'] & K^M_{j-1}(\mathrm{Frac}(R/\pi)) \xrightarrow{\mathrm{dlog}} W_r\Omega^{j-1}_{\mathrm{Frac}(R/\pi), \log}
\end{tikzcd}$$

$F = \mathrm{Frac}(R^h_{\pi R})$

Moralement : $\{f_1, \ldots, f_{j-1}, \pi\} \longmapsto \mathrm{dlog}[\bar{f}_1] \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}[\bar{f}_{j-1}]$

(Gersten injectivity by Gros–Suwa ?)

Considérons le diagramme comm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^M_j(R)/p^r \arrow[r] \arrow[d] & K^M_j(R[\tfrac{1}{p}])/p^r \arrow[r, "\partial^M"] \arrow[d, "h^j_{p^r}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^M_{j-1}(R/\pi)/p^r \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{dlog}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{K}^M_j(R)/p^r \arrow[r] & H^j_{ét}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[r, "\partial"] & W_r\Omega^{j-1}_{R/\pi, \log} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exacte à droite

résolution de Gersten pour $W_r\Omega^j_{\log}$ complexe

Donc, Thm A $\iff$ injectivité en haut à gauche + bijectivité de $h^j_{p^r}$.

Thm A' $\iff$ exactitude de la suite en bas

① Prop (Formulation équivalente) Si $K^M_j(R) \xrightarrow{\sim} \hat{K}^M_j(R)$ (e.g. si le corps rés. de R est gros), alors Thm A $\iff$ Thm A' pour j, r, V, R fixés.

② Prop. Réduction au cas de R avec gros corps résiduel pour Thm A'.

Astuce avec le transfert : construisons $R \to R'$ fét, corps $k \to k'$, $\deg = l$ premier à p. $\hat{K}^M_j$ admet des transferts.
gros

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{K}^M_j(R)/p^r \arrow[r] \arrow[d, shift left] & H^j_{ét}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & W_r\Omega^{j-1}_{R/\pi, \log} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{K}^M_j(R')/p^r \arrow[r] \arrow[u, shift left, "N_{R'/R}"] & H^j_{ét}(R'[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, bend right, "N_{R'/R}"'] & W_r\Omega^{j-1}_{R'/\pi, \log} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

compatibilité implicite

injectivité de Gersten de Gabber

③ Prop (argument de Tate) Réduction au cas de $r = 1$, pour Thm A :

Comparer avec R remplacé par $O_F = R^h_{\pi R}$, et

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}^M_j(F)/p^r \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^j_{ét}(F, \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[d] \\
\hat{K}^M_j(F')/p^r \arrow[r] \arrow[u, shift right, "N"'] & H^j_{ét}(F', \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[u, shift right, "N"']
\end{tikzcd}$$

V, R comme dans Thm A.

$V' =$ anneau des entiers dans $\mathrm{Frac}(V)(\zeta_p)$, $R' = R \otimes_V V'$.

Hypothèse : $\mathrm{Frac}(V) \subset \mathrm{Frac}(V')$ totalement ramifié $\Rightarrow R'$ local et vérifie les conditions du Thm A.

Alors

ⓐ Thm A pour $(V \to R, r = 1, 0 \leq j \leq J)$

ⓑ Thm A pour $(V' \to R', r = 1, 0 \leq j \leq J)$

$\Big\} \Longrightarrow$ ⓒ Thm A pour $(V \to R, r \geq 1, 0 \leq j \leq J)$

Pf. Induction sur r. ($\Delta := \mathrm{Gal}(R'/R)$)

seulement complexe ici, pour l'instant

$$\begin{tikzcd}
(\mu_p \otimes_{\mathbb{F}_p} K^M_{j-1}(R'[\tfrac{1}{p}])/p)^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & K^M_j(R[\tfrac{1}{p}])/p^r \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\wr\, h^j_{p^r}"] & K^M_j(R[\tfrac{1}{p}])/p^{r+1} \arrow[r] \arrow[d, "h^j_{p^{r+1}}"] & K^M_j(R[\tfrac{1}{p}])/p \arrow[r] \arrow[d, "\wr\, h^j_p"] & 0 \\
H^j_{ét}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_p^{\otimes j}) \arrow[r] & H^j_{ét}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \arrow[r] & H^j_{ét}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^{r+1}}^{\otimes j}) \arrow[r, "p^r"] & H^j_{ét}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_p^{\otimes j}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$x \otimes a \mapsto [x] \cup h^{j-1}_p(a)$

$x \otimes y \longmapsto \{x, y\}$.

d'où $h^j_{p^{r+1}}$ est un iso, et les deux rangs sont tous exacts (... Bloch-Kato conj.)

Pour l'injectivité de Gersten, faut travailler un peu plus (chasse au diagramme)

Induction sur r :

$$\begin{tikzcd}
\mu_p \otimes_{\mathbb{F}_p} K^M_{j-1}(R'[\tfrac{1}{p}]) \arrow[r] & K^M_j(R'[\tfrac{1}{p}])/p^r \arrow[r, "p"] & K^M_j(R'[\tfrac{1}{p}])/p^{r+1} \arrow[r] & K^M_j(R'[\tfrac{1}{p}])/p \arrow[r] & 0 \\
& K^M_j(R')/p^r \arrow[r, "p"] \arrow[u] & K^M_j(R')/p^{r+1} \arrow[r] \arrow[u] & K^M_j(R')/p \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

$\{\xi\}_{p,\beta}\} + \langle a, \pi' \rangle \cdot \gamma$

$\beta \in K^M_{j-1}(R')$, $a \in K^M_2(R')$, $\gamma \in K^M_{j-2}(R')$

$\exists \alpha'$ — soit α — φ

On vérifie $p\alpha' = 0$ par calcul.

$\Rightarrow$ l'injectivité de $K^M_j(R)/p^r \to K^M_j(R[\tfrac{1}{p}])/p^r$ par l'astuce de norme (transfert. ($\deg R'/R$ premier à p)

④ Réduction au cas nonramifié (i.e. $e = 1$).

2 ingrédients $\Big\langle$ complexes syntomiques p-adiques $\mathbb{Z}_p(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
l'extension de Kan à gauche

• L'ext. de Kan à gauche d'un foncteur $F : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ ∞-cat

$\cap$ pleine

est un foncteur LF tq. $LF|_{\mathcal{C}_0} \cong F$ $\mathcal{C} \xrightarrow{\ LF\ }$

et tq. $\forall X \in \mathcal{C}$, $\underset{X_0 \to X}{\mathrm{hocolim}}\, F(X_0) \xrightarrow{\sim} LF(X)$ équivalence

(si F est défini sur $\mathcal{C}$, on a alors $L(F|_{\mathcal{C}_0}) \longrightarrow F$ naturel)

Un foncteur F est ~~Kan~~ étendu de Kan à gauche de $\mathcal{C}_0$ si $L(F|_{\mathcal{C}_0}) \xrightarrow{\sim} F$.

Ex.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Poly}^{\mathrm{tf}}_A \arrow[r, "\Omega^1_{-/A}\ \cancel{\mathrm{rep}}\ \Omega^{\bullet}_{-/A}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathcal{D}(A) \\
\mathrm{CAlg}_A \arrow[ur, "L\Omega_{-/A}"', "\text{resp. } dR_{-/A}"]
\end{tikzcd}$$

A. anneau comm.

Ex. $\mathcal{C}_0 = \{$ ~~p-tor~~ $\mathbb{Z}_{(p)}$-alg. ind-lisse, p-henséliennes$\} \xrightarrow{\ F\ } \mathcal{D}(\mathbb{Z})$

$\cap$

$\mathcal{C} = \{\mathbb{Z}_{(p)}$-alg. p-hensélienne$\}$ $\nearrow L^{sm}F$

$L^{sm}F(A) = \underset{\substack{R \to A \\ \text{ind-lisse, } p\text{-hens.}}}{\mathrm{colim}}\, F(R) = \underset{\substack{R \twoheadrightarrow A \\ \in \mathcal{C}_0,\ \text{surjection hensélienne}}}{\mathrm{colim}}\, F(R) = |F(R_\bullet)|$ ← réalisation géométrique

où $R_\bullet \to A$ est une résolution simpliciale avec $R_i \twoheadrightarrow A$ surj. henséliennes

Prop. k anneau comm. $\ell \in \mathbb{N}$. Alors $H_0(L^{sm}(K^M_j/\ell)(A)) \xrightarrow{\sim} K^M_j(A)/\ell$

(en tant que foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sm}^{\mathrm{loc}}_k \arrow[r, "K^M_j/\ell"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathcal{D}^{\le 0}(\mathbb{Z}) \\
\mathrm{Alg}^{\mathrm{loc}}_k \arrow[ur, "L^{sm}(K^M_j/\ell)"'] \arrow[r, Rightarrow] & K^M_j/\ell \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

)

Dém. $j=1$. $K^M_j = \mathbb{G}_m$. s'ensuit de (Mathew, cf. [Elmanto, et al. alg. cobordism])

En général, $L^{Sm}(K^M_j/\ell)(A) = |K^M_j(R_\bullet)/\ell|$. Mettant tout j en semble :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\geq 0} K^M_j(R_0)/\ell \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \bigoplus_{j\geq 0} K^M_j(A)/\ell \\
\bigoplus_{j\geq 0} H_0(K^M_j(R_\bullet)/\ell) \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

anneaux gradués commutatifs

$$\bigoplus_{j\geq 0} H_0(K^M_j(R_\bullet)/\ell) = \mathrm{Eq}(K^M_j(R_1) \rightrightarrows K^M_j(R_0))$$

$\langle 1+I\rangle \subseteq \ker\beta \subseteq \ker\alpha = \langle 1+I\rangle$ $\Longrightarrow \gamma$ est un iso.

$\uparrow$
γ iso en degré $j=1$

• Complexes syntomiques p-adiques $\mathbb{Z}_p(n)$.

[Bhatt-Lurie] $\mathbb{Z}_p(n) : \mathrm{CAlg}^{an} \longrightarrow \mathcal{D}_{comp}(\mathbb{Z}_p)$, $n\in\mathbb{Z}$. construction globale.

[BMS2]. $\mathbb{Z}_p(n)$, $n\in\mathbb{N}$, définis d'abord sur QRSPerfd $\subseteq$ QSyn, puis par descente. (Ils y sont des faisceaux).

$R \in$ QRSPerfd si $\Big\langle$ p-complet (au sens dérivé) ; $\exists\, A \longrightarrow R$, A perfectoïde entier ; et $\Big\langle$ $R[p^\infty] = R[p^n]$ $(\exists\, n\in\mathbb{N})$; $L\Omega^1_R \otimes^L_R (R/p)[-1] \in \mathcal{D}(R/p)$ est un module plat.

La catégorie $(R)_\Delta = \{(A,I)$ prisme muni d'un morphisme $R\to A/I\}$ admet alors un objet initial : $(\Delta_R, (d)) \ni \varphi(x) = x^p + p\delta(x)$.

Filtration de Nygaard : $\mathrm{Fil}^n_N(\Delta_R) = \{x\in\Delta_R \mid \varphi(x)\in d^n\Delta_R\} \xrightarrow{\varphi} \Delta_R$.

de façon similaire. $\mathrm{Fil}^n_N \Delta_R\{n\} \xrightarrow{\varphi\{n\}} \Delta_R\{n\}$, $\varphi\{n\} = \varphi/d^n$

Déf. $\mathbb{Z}_p(n)(R) := \mathrm{fib}\left(\varphi\{n\} - \mathrm{id} : \mathrm{Fil}^n_N \Delta_R\{n\} \longrightarrow \Delta_R\{n\}\right)$

e.g. $R/\mathbb{F}_p$ quasi-rég. semi-parfait, alors $\mathbb{Z}_p(n)(R) = \mathrm{fib}\left(\frac{\varphi}{p^n} - \mathrm{id} : \mathrm{Fil}^n_N A_{crys}(R) \to A_{crys}(R)\right)$

$\overset{\text{descente}}{\rightsquigarrow}$ $\mathbb{Z}_p(n)$ sur QSyn $\xrightarrow[\text{à gauche}]{\text{ext. de Kan}}$ $\mathbb{Z}_p(n)$ sur $\{$anneaux animés p-complets$\}$.

c'est en fait $R\Gamma_{syn}(\mathrm{Spf}(R), \mathbb{Z}_p(n))$ pour [Bhatt-Lurie].

Pour nous : A p-hensélien, p^∞-torsion est bornée.

• $\mathbb{Z}_p(n)$ satisfait à la descente pour la top. étale (en fait fpqc).

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{Z}_p(n)_X :=$ faisceaux étale sur $X_{ét}$. X schéma.

• $(\mathbb{Z}_p(j)_X/p^n) = \mathbb{Z}/p^n(j)_X$, $\cong \mu_{p^n}^{\otimes j}$ si $X/\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

• X schéma régulier $/\mathbb{F}_p$, alors $\mathbb{Z}/p^n(j)_X \cong W_n\Omega^j_{X,\log}[-j]$.

Thm (Antieau-Mathew-Morrow-Nikolaus) ① $\mathbb{Z}_p(n)$ est étendu de Kan à gauche de {p-hensélien, ind-lisse / $\mathbb{Z}_{(p)}$} à {p-hensélien}

② $\mathrm{fib}(\mathbb{Z}_p(j)(R) \to \mathbb{Z}_p(j)(R/I)) \in \mathcal{D}^{\leq j}(\mathbb{Z})$ pour R p-complet (R, I) couple hensélien.

$\Longrightarrow$ $\tau^{\leq j}\mathbb{Z}_p(j)$ étendu de Kan à gauche de {p-hensélien, ind-lisse/$\mathbb{Z}_{(p)}$} à {p-hensélien}.

Thm (Bhatt-Mathew). R ind-lisse/V. p-hensélien, alors.

$$H^j(\mathbb{Z}_p(j)(R)/p^r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^j_{et}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \longrightarrow W_r\Omega^{j-1}_{R/\pi, \log}\right)$$

$\uparrow$ symbole, étale localement surjectif.

$(R^\times)^{\otimes j}$

Réduction finale : notons $F = \tau^{\leq j}\mathbb{Z}_p(j)(-)/p^r[j]$. $G = K^M_j(-)/p^r$.

Prop ④. $V^{nr} \subseteq V$ (même corps résiduel), $j, r \geq 1$.

Alors Thm A' pour tous les anneaux locaux ind-lisse/V^{nr}, p-hensélien ($\Rightarrow$ $F \to G$ induisant $H_0F \xrightarrow{\sim} G$)

$\Downarrow$

Thm A' pour tous les anneaux locaux ind-lisse/V, p-hensélien

Dém. $F \to G$, $\in \mathcal{D}^{\leq 0}$ induisant $H_0F \xrightarrow{\sim} G$ sur $\mathrm{Sm}^{loc}_{V^{nr}}$

$\rightsquigarrow$ $F \to L^{Sm}G$, $\in \mathcal{D}^{\leq 0}$ induisant $H_0F \xrightarrow{\sim} H_0(L^{Sm}G) \cong G$ sur $\mathrm{Alg}^{loc}_{V^{nr}}$, en particulier sur Sm^{loc}_V.

$$\Longrightarrow \quad H^j(\mathbb{Z}_p(j)(R)/p^r) \xrightarrow{\sim} K^M_j(R)$$

$\downarrow\wr$ R ind-lisse/V

$$\ker\left(H^j_{et}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_{p^r}^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial} W_r\Omega^{j-1}_{R/\pi, \log}\right)$$

Cor. Thm A (et Thm A') se réduit au cas V nonramifié, $r=1$. et avec gros corps rés.

Dém. Réduit déjà au cas de V avec gros corps résiduel. ② Soit $V^{nr} \subset V$.

Thm A pr $(V^{nr} \to \forall R, \forall j, r=1)$ $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ Thm A' pr $(V^{nr} \to \forall R, \forall j. r=1)$

$\Downarrow$ prop. ④

③ Thm A pr $(V^{nr}(\zeta_p) \to \forall R, \forall j. r=1)$ $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ Thm A' pr $(V^{nr}(\zeta_p) \to \forall R, \forall j. r=1)$

Thm A pr $(V^{nr} \to \forall R, \forall j. \forall r \geq 1)$ $\overset{④}{\Longleftrightarrow}$ Thm A' pr $(V^{nr} \to \forall R, \forall j. \forall r \geq 1)$

$\Downarrow$ prop. ④

Thm A pr $(V \to \forall R, \forall j. \forall r \geq 1)$ $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ Thm A' pr $(V \to \forall R, \forall j. \forall r \geq 1)$

Proof of Thm A in abs. unramified, big res. field : $r=1$ case $\boxed{p \text{ odd}}$ for simplicity

(sketch) (For $p=2$ it will be more complicated in computations)

need to recheck it if $p=2$.

Cor 2.15. $\exists$ exact sequence $\Omega^{j-1}_{R/p} \xrightarrow{\rho^1_j} K^M_j(R)/p \xrightarrow{\partial} K^M_j(R/p)/p \to 0$ [Lüders–Morrow]

R p-henselian, additionally such that gen by units, $K^M_2(R) \simeq K_2(R)$.

$a\, d\log b_1 \wedge \dots \wedge d\log b_{j-1} \mapsto \{1+\tilde{a}p^1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{j-1}\}$

This exact seq. fits into the following comm. diagram (~~except~~ the red part to be added later)

$\mathcal{O}_F = R^h_{pR}$, $F = \mathcal{O}_F[\frac{1}{p}]$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{j-1}_{R/p} \arrow[r, "\rho^1_j"] \arrow[d, "id"] & K^M_j(R)/p \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & K^M_j(R/p)/p \arrow[r] & 0 & \text{row exact} \\
& & K^M_j(F)/p \arrow[d, "\text{Bloch-Kato conj.}"] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{j-1}_{R/p} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & K^M_j(R[\frac{1}{p}])/p \arrow[r, "\partial_p \oplus \partial", "\cong"'] \arrow[ur] \arrow[d, "h^j_1"] & K^M_j(R/p)/p \oplus K^M_{j-1}(R/p)/p \arrow[r] \arrow[dd, "\text{Bloch-Kato-Gabber dlog}", "\cong"'] & 0 \quad \text{row exc.} \quad \text{vanishing cycles} \\
& & H^j_{et}(R[\frac{1}{p}], \mu_p^{\otimes j}) \arrow[r, "\text{Gabber's injectivity}"] \arrow[d, "\alpha"] & H^j_{et}(F, \mu_p^{\otimes j}) \arrow[d, "\text{Gabber's affine analogue of proper base change}", "\cong"'] & \\
& & & H^0_{et}(\mathcal{O}_F/p, i^*R^j j_*\mu_p^{\otimes j}) & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{j-1}_{R/p} \arrow[r, "\rho^1_j"] & H^0_{et}(R/p, i^*R^j j_*\mu_p^{\otimes j}) \arrow[r, "\partial_p \oplus \partial"] \arrow[ur] & \Omega^j_{R/p,\log} \oplus \Omega^{j-1}_{R/p,\log} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

row exact by [BK]

done by explicit calculation in parallel to symbol filtration on

where : • the second row is exact since :

$$\begin{tikzcd}
K^M_j(R) \arrow[r] \arrow[d] & K^M_j(R[\frac{1}{p}]) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "\partial_p"] & K^M_{j-1}(R/p) \arrow[r] & 0 \\
K^M_j(R/p) & & &
\end{tikzcd}$$

row exact

+ the exactness of the first row

Second row even short exact $\Rightarrow$ Gersten injectivity by snake's lemma.

- $\alpha \circ h^j_1$ is iso by snake's lemma for example (comparing with the last row)
- α is surjective since $\exists$ Spectral seq. $E_2^{s,t} = H^s_{et}(R/p, i^*R^t j_*(\mu_p^{\otimes j}))$

$$\Downarrow$$

$$H^{s+t}_{et}(R[\tfrac{1}{p}], \mu_p^{\otimes j})$$

SGA4. Exp. X. Thm 5.1 + $\boxed{\operatorname{cd}_p(\text{schéma noethérien affine de car}=p) \leq 1}$

$\Rightarrow 0 \to H^1_{et}(R/p, i^*R^{j-1} j_*\mu_p^{\otimes j}) \to H^j_{et}(R[\frac{1}{p}], \mu_p^{\otimes j}) \xrightarrow{\alpha} H^0_{et}(R/p, i^*R^j j_*(\mu_p^{\otimes j})) \to$ exact.

- hence ① h^j_1 is injective.

② it suffices to prove the injectivity of α. which follows from the red part.

Gersten conjecture.

Thm 4.1: V cDVR mixed char $(0,p)$

R p-henselian regular, Noetherian, local V-alg s.t. $R/\mathfrak{m}R$ ind-smooth $/V/\mathfrak{m}$

Then the mod p-power Gersten conj. holds for R; $\forall r, j \geq 0$, ~~have exact seq~~ the seq. (complex)

$$0 \to \hat{K}^M_j(R)/p^r \to K^M_j(\mathrm{Frac}(R))/p^r \to \bigoplus_{x \in \mathrm{Spec}(R)^{(1)}} K^M_{j-1}(k(x))/p^r \to \cdots$$

is exact.

Pf. Hypothesis $\Rightarrow$ $R/\mathfrak{m}R$ geom. regular $/ V/\mathfrak{m}$ and $R[\frac{1}{p}]$ geom. regular $/ V[\frac{1}{p}]$.

$\Rightarrow$ $V \to R$ is ind-smooth by Néron-Popescu.

One possible way:

The argument follows Panin's (and Kerz's): dévissage $\leftarrow$ not local.

let $Z = \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}R) = X_s$, $X_\eta = \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{p}])$

Consider the complexes:

$$g_j(X) = 0 \to K^M_j(\mathrm{Frac}(R))/p^r \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K^M_j(k(x))/p^r \to \cdots$$

$$g_j(Z) = 0 \to K^M_j(\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{m}R))/p^r \to \bigoplus_{x \in Z^{(1)}} K^M_j(k(x))/p^r \to \cdots$$

$$g_j(X_\eta) = 0 \to K^M_j(\mathrm{Frac}(R))/p^r \to \bigoplus_{x \in X_\eta^{(1)}} K^M_j(k(x))/p^r \to \cdots$$

fitting into exact sq. of complexes: $0 \to g_{j-1}(Z)[-1] \to g_j(X) \to g_j(X_\eta) \to 0$ $(*)$

By [Kerz10, Milnor K-th finite fields] & [Kerz08, Gersten conj.], $g_j(X_\eta)$ calculates $H^\bullet_{Zar}(X_\eta, \hat{K}^M_j/p^r)$

but not $\hat{K}^M_j(R[\frac{1}{p}])$ since the ring $R[\frac{1}{p}]$ is not local; ~~$g_j(Z)$ calculates~~ and $\hat{K}^M_j(R/\mathfrak{m}R)/p^r \xrightarrow[\sim]{\text{qiso}} g_j$

Taking the long exact seq. associated to $(*)$:

- $0 \to H^0(g_j(X)) \to H^0_{Zar}(X_\eta, \hat{K}^M_j/p^r) \to \hat{K}^M_{j-1}(R/\mathfrak{m}R)/p^r \to H^1(g_j(X)) \to$

  $\hat{K}^M_{j-1}(R/\mathfrak{m}R)/p^r \xrightarrow[\wr]{\mathrm{dlog}} W_r\Omega^{j-1}_{R/\mathfrak{m}R,\log}$; $H^1(g_j(X)) \to H^1_{Zar}(X_\eta, \hat{K}^M_j/p^r) \to 0$

- $0 \to H^n(g_j(X)) \xrightarrow{\sim} H^n_{Zar}(X_\eta, \hat{K}^M_j/p^r) \to 0$, $n \geq 2$

Lem 4.2. using Gersten resolution for motivic cohomology over Dedekind rings [Geisser2004] and Bloch-Kato isomorphism (à la Levine) $\hat{K}^M_j/p^r \xrightarrow{\sim} R^j\varepsilon_*\mu_{p^r}^{\otimes j}$ on $\mathrm{Spec}(S[\frac{1}{p}])_{ét}$,

one gets: $H^n_{Zar}(X_\eta, \hat{K}^M_j/p^r) = \begin{cases} H^j_{ét}(X_\eta, \mu_{p^r}^{\otimes j}), & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$

From these + Thm A', we deduce $\hat{K}^M_j(R)/p^r \xrightarrow[\sim]{\text{qiso}} g_j(X)$. $\square$